Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
А.Цих / А.К.Цих
«17» июня 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ФУНКЦИЯ РОНКИНА КОМПЛЕКСНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук 17.06.2016 / А.В.Щуплев

Выпускник Пач / М.И.Пачковская
17.06.2016

Красноярск 2016

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
____________ / А.К.Цих
«____» _________ 2016 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ФУНКЦИЯ РОНКИНА КОМПЛЕКСНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук ____________ / А.В.Щуплев

Выпускник _______ / М.И.Пачковская

Красноярск 2016

АННОТАЦИЯ

Амебой комплексной алгебраической гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ называется проекция на вещественное подпространство ее логарифмического образа. Структура дополнения к амебе гиперповерхности связана со структурой многогранника Ньютона определяющего ее многочлена. Эта связь осуществляется через функцию Ронкина, а точнее ее градиент.

Цель работы — сравнить классическую функцию Ронкина комплексной алгебраической кривой в $\mathbb{C}^2$ с обобщенной функцией Ронкина, предложенной И.Кричивером. Прямые вычисления показали, что даже в компонентах дополнения они различаются на кусочно-линейные функции.

В общем случае при помощи формулы Йенсена была получена явная формула, связывающая классическую и обобщенную функции Ронкина алгебраической кривой в $\mathbb{C}^2$. Также была получена версия этой формулы для комплексно-аналитической кривой в $\mathbb{C}^2$.

Ключевые слова: амеба, формула Йенсена, функция Ронкина.

ABSTRACT

An amoeba of a complex algebraic hypersurface in $\mathbb{C}^n$ is the projection on the real subspace of its logarithmic image. The structure of the complement to the amoeba of a hypersurface is related to the structure of the Newton polyhedron of the polynomial defining the hypersurface. This relation is throught the Ronkin function, more precisely by means of its gradient.

The purpose of this paper is to compare the classical Ronkin function of a complex algebraic curve in $\mathbb{C}^2$ with the generalized Ronkin function proposed by Krichiver. Direct calculations show that even in the complement components they differ by piecewise linear functions.

In the general case an explictit formula linking the classical and generalized Ronkin functions of an algebraic curve in $\mathbb{C}^2$ was obtained with the help of Jensen's formula. A version of this formula for a complex-analytic curve in $\mathbb{C}^2$ was also obtained.

Key words: amoeba, Jensen's formula, the Ronkin function.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач математики является решение уравнений и их систем. И если для линейных уравнений и систем линейных уравнений теория их решений полностью разработана, то даже для алгебраических уравнений более высоких степеней эта задача усложняется, не говоря уже о транцендентных уравнениях. В этом случае возможно использование численных методов для приближенного вычисления корня, который, однако, следует сначала локализовать.

Для уравнения $f(z) = 0$, где $f(z)$ — голоморфная функция одного комплексного переменного, при помощи формулы логарифмического вычета можно построить функцию, считающую количество корней уравнения в области. В первом разделе приведена эта функция, отмечены ее недостатки (например, разрывность) и показано, как при помощи формулы Йенсена определить непрерывную функцию, которую можно использовать считающей.

Многомерным аналогом этой функции является функция Ронкина, определенная в пространстве логарифмов модулей координат, то есть в пространстве, в котором располагается амеба алгебраической гиперповерхности $V = \{P(z) = 0\}$. Градиент функции Ронкина в точках дополнения амебы постоянен и связан со структурой многочлена $P(z)$.

Функция Ронкина определена интегралом по циклу в дополнении к гиперповерхности, что затрудняет ее использование в случаях, когда поверхность задана, например, параметрически. Таким образом, представляет интерес «внутреннее» определение функции Ронкина, связанное только с самой поверхностью, а не способом ее вложения. Такое определение для алгебраических кривых было предложено в работе [3]. Обобщенная амеба и обобщенная функция Ронкина алгебраической кривой определяется при помощи фиксации на ней двух мероморфных дифференциалов. Необходимые определения из теории классических амеб и обобщенных даны во втором разделе.

Если в рамках обобщенного подхода алгебраическую кривую рассматривать вложенной в $\mathbb{C}^2$ переменных z и w, а в качестве дифференциалов взять $\frac{dz}{z}$ и $\frac{dw}{w}$, то обобщенная амеба совпадает с классической, и для нее можно сравнить классическую и обобщенную функции Ронкина. В разделе 3 они вычисляются для комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$, заданной уравнением

$$1 + z + w = 0.$$

Вычисления показали, что даже в компонентах дополнения амебы эти две функции различаются, причем в разных компонентах на разные кусочно-линейные функции.

В разделе 4 при помощи формулы Йенсена была получена явная формула, связывающая классическую и обобщенную функции Ронкина алгебраической кривой в $\mathbb{C}^2$. Также была получена версия этой формулы для комплексно-аналитической кривой в $\mathbb{C}^2$.

Магистерская диссертация по теме «Функция Ронкина комплексно-аналитической гиперповехности» содержит 17 страниц текста, 7 рисунков, список использованных источников включает 7 наименований.

Основные результаты диссертации докладывались на Городском научном семинаре «Алгебраическая геометрия и многомерные вычеты».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы были получены следующие результаты:

1. исследована научная литература по теории классических и обобщенных амеб;

2. вычислены классическая и обобщенная функции Ронкина в компонентах дополнения амебы комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$;

3. установлено, что классическая и обобщенная функции Ронкина (при определенном выборе мероморфных дифференциалов) различаются на кусочно-линейную функцию;

4. получена явная формула, связывающая классическую и обобщенную функции Ронкина для алгебраической кривой в $\mathbb{C}^2$, а также ее версия для комплексно-аналитической кривой в $\mathbb{C}^2$.

Полученные результаты имеют теоритическое значение и могут быть использованы при дальнейших исследованиях в теории амеб.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Forsberg, M. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas./M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh. — Advances in Mathematics. — 2000. — №1. — P. 45-70.

2 Jensen, J.L.W.V. Sur un nouvel et important théoréme de la théorie des fonction./J.L.W.V. Jensen — Acta Mathematica. — 1899 — Volume 22. — P. 359-364.

3 Krichever, I. Amoebas, Ronkin function and Monge-Ampère measures of algebraic curves with marked points./I. Krichever. — American Mathematical Society Translations. — 2014 — Series 2. — P. 265-278.

4 Passare, M. Amoebas of Complex Hypersurfaces in Statistical Thermodynamics./M.Passare, D.Pochekutov, A.Tsikh. — Mathematical Physics Analysis and Geometry. — 2013 — Volume 16. — P. 89-108.

5 Rullgård, H. Topics in geometry, analysis and inverse problems:doctoral dissertation/H. Rullgård. — Stockholm, 2003. — P. 123.

6 Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов/Г.Б.Двайт — Москва: Наука, 1966 — 228 с.

7 Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ: учебное пособие/Б.В Шабат. — Москва:Наука, 1969 — 571 с.